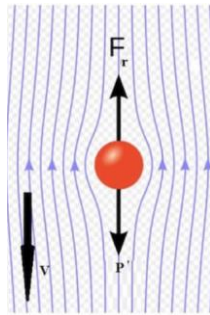


Moto con forze viscose

a cura di Giancarlo Buccella



Quando un oggetto si muove all'interno di un fluido, come l'aria o l'acqua, sperimenta una forza di resistenza che si oppone al suo moto, tendendo a ridurre la velocità. Questa forza, nota come resistenza del mezzo o attrito viscoso, aumenta con l'aumentare della velocità del corpo. La sua dipendenza dalla velocità, tuttavia, è complessa e influenzata da numerosi parametri, tra cui le dimensioni geometriche, la forma, le caratteristiche superficiali dell'oggetto e le proprietà del fluido come densità, viscosità e temperatura.

La trattazione di questa forza di resistenza si basa spesso su modelli empirici. Sebbene le relazioni generali tra i parametri possano essere talvolta dedotte da considerazioni dimensionali, i valori numerici specifici devono essere determinati sperimentalmente, ad esempio attraverso test in una galleria del vento. Solo in casi di geometrie molto semplici e condizioni di moto particolari è possibile determinare teoricamente la forza di resistenza.

In generale la forza di attrito viscoso viene descritta mediante due diversi modelli:

- 1) Il primo modello valido in caso di basse velocità (ad esempio una sfera che cade nell'acqua). In questo modello la forza di attrito viscoso aumenta proporzionalmente con la velocità.
- 2) Il secondo modello è invece valido quando si studia il moto di oggetti di grandi dimensioni che si muovono ad elevata velocità (aereo, paracadutista, automobile). In questo modello la forza aumenta con il quadrato della velocità.

Questa resistenza dipende, come già accennato, oltre che dalla velocità, dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto e dalle caratteristiche del fluido (es. densità, viscosità, ecc.).

Forma - Per descrivere come influenza il moto la forma del corpo si usa il cosiddetto "Il coefficiente di resistenza aerodinamica" (o coefficiente di penetrazione aerodinamica) C_x , esso è un coefficiente adimensionale usato per misurare la resistenza aerodinamica di un corpo in moto in un fluido. Comprende, per un corpo generico, i contributi di due tipi di resistenza fluidodinamica: la resistenza di attrito e la resistenza di forma. Ad esempio per un paracadute vale 1.4 mentre per un'auto 0.3.

Dimensione - Considerando che a parità di coefficiente di resistenza aerodinamica, due corpi possono subire una maggiore o minore resistenza aerodinamica semplicemente per una sezione frontale maggiore o minore, ecco che entra in gioco anche la dimensione del corpo ossia più precisamente l'area della sezione del corpo proiettata sul piano perpendicolare del moto.

Viscosità – La viscosità di un fluido viene descritta mediante il coefficiente di attrito viscoso **dinamico** (η) e **cinematico** (ν), essa è una grandezza che misura la propensione di un fluido a generare attrito interno tra i propri strati in movimento; è una caratteristica che dipende solamente dal tipo di fluido e che riguarda esclusivamente i fluidi reali.

L'unità di misura della viscosità più utilizzata nel SI è il poiseuille (PI) ed è definita come

$$PI = \frac{kg}{m \cdot s} = P_a \cdot s \quad \text{dove } P_a \text{ indica il pascal,}$$

mentre nel Sistema CGS si usa il poise (P) definito come

$$P = 0.1 \cdot PI = 0.1 \cdot P_a \cdot s$$

Occorre precisare che la viscosità varia con la temperatura e pertanto va specificato a quale valore di essa si riferisce.

Tabella esemplificativa con i valori di viscosità cinematica e dinamica

Liquidi	η / mPa*s a 20°C	η / mPa*s a 0°C	ν / mm²/s a 20°C
Acqua	1,002	1,792	1,004
Olio d'oliva	80,8		89
Etanolo	1,20	1,78	1,52
Metanolo	0,587	0,820	0,742
Benzolo	0,648	0,91	0,737

Gas a 0°C; 1013 hPa	η / μ Pa*s	ν / mm²/s
Aria	17,2	13,3
Anidride carbonica	13,7	6,93
Azoto	16,5	13,2
Ossigeno	19,2	13,4

Si noti che l'attrito viscoso è responsabile ad esempio della rotazione dei fluidi all'interno di un contenitore. Se vogliamo mettere in rotazione dell'acqua chiusa in una bottiglia, in modo da formare un vortice, quello che facciamo a far roteare la bottiglia. Il moto rotatorio del contenitore viene trasmesso al fluido grazie all'attrito viscoso. Quando il moto rotatorio ha inizio, sono gli strati che aderiscono alle pareti della bottiglia i primi che, sotto l'effetto della forza di attrito, vengono trascinati e messi in rotazione. Questi, a loro volta, trascinano con sé gli strati d'acqua immediatamente più interni che cominciano così a mettersi in moto e via così procedendo sempre verso l'interno, allontanandosi progressivamente dalle pareti del contenitore. Gli strati d'acqua più prossimi all'asse di rotazione si metteranno in moto per ultimi e quelli vicini alle pareti della bottiglia avranno già acquisito una buona velocità. Al termine del processo però tutti gli strati di fluido, indipendentemente dalla loro posizione, avranno raggiunto la medesima velocità angolare.

Esiste una formula per calcolare la forza di attrito viscoso all'interno di un fluido, ed è la seguente:

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

Dove η è il coefficiente viscoso dinamico, dS è la superficie di contatto tra due strati di fluido adiacenti mentre con il rapporto dv/dn viene indicata la variazione di velocità lungo la direzione ortogonale alla superficie di contatto.

Viscosità dinamica

Se pensiamo ad esempio ad un moto di un fluido in un condotto, indicando con

- F la forza applicata tangenzialmente alla superficie
- S l'area della lamina superficiale del liquido
- v la sua velocità e con h la sua distanza dalla lamina aderente sul fondo del recipiente

sussiste la seguente identità:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{h}$$

In cui il coefficiente di proporzionalità η prende il nome di **viscosità dinamica** del liquido. Dalla relazione precedente si ricava:

$$\eta = \frac{F}{S} \frac{h}{v}$$

tenendo conto che la forza si esprime in Newton, la distanza in metri, la superficie in m^2 e la velocità in m/s si può ricavare l'equazione dimensionale di η :

$$\eta = N \cdot m / m^2 m/s = [N \cdot s / m^2] = Kg/m s$$

Viscosità cinematica

Essa è data semplicemente dal rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido.

$$\nu = \frac{\eta}{d}$$

Densità – La densità è un parametro che entra in modo diretto nella descrizione di un moto viscoso in varie relazioni ed anche attraverso la grandezza viscosità cinematica (o diffusività cinematica).

Essa è una misura della resistenza a scorrere di una corrente fluida sotto l'influenza della gravità. Questa tendenza dipende sia dalla viscosità dinamica sia dal peso specifico del fluido. Quando due fluidi di uguale volume sono messi in viscosimetri capillari identici e lasciati scorrere per gravità, il fluido avente maggior diffusività impiega più tempo a scorrere. Per esempio il mercurio risulta avere una viscosità dinamica 1,7 volte maggiore di quella dell'acqua, ma a causa del suo elevato peso specifico, esso percola molto più rapidamente da uno stesso foro a parità di volume. Infatti la viscosità cinematica del mercurio è nove volte minore di quella dell'acqua a temperatura ambiente (20 °C).

Per descrivere la viscosità cinematica è utile introdurre un parametro – detto numero di Reynolds - che ci permette di distinguere tra regime laminare e regime turbolento. Il numero di Reynolds (abbreviato in R_e) è un numero adimensionale usato in fluidodinamica, esso è proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Dove v è la velocità del flusso del fluido (velocità media, nel caso di scorrimento in un condotto, oppure velocità rispetto al corpo in esame), ρ la sua densità, η è la viscosità dinamica ed L è una "lunghezza caratteristica" del problema (per es. nel caso del moto di un fluido in un condotto L è il diametro del condotto).

I valori critici del numero di Reynolds per i quali si passa dal regime laminare al regime turbolento dipendono ovviamente dalla forma geometrica dei sistemi. Esistono tuttavia dei criteri empirici approssimativi del tipo:

- $R_e < 1000$ il moto è sempre laminare
- $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r il flusso è sempre laminare
- $R_e > 2000$ in tubature diritte di sezione circolare si può avere moto laminare o turbolento a seconda di vari fattori, tra cui la rugosità della parete del tubo, ecc...
- $R_e > 10000$ il regime è sempre turbolento

Un caso interessante si presenta per valori di $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r , qualora si fissino i valori della densità e della viscosità, risulta che ad una certa velocità, detta velocità critica, avviene il passaggio dal moto laminare a quello turbolento, infatti:

$$v_c = \frac{\eta}{\rho r} R_e$$

Si verifica sperimentalmente che un fluido in un condotto cilindrico passa da un moto laminare a uno turbolento quando $Re \approx 1200$. Per valori prossimi a 1200 il passaggio avviene gradualmente e prendi il nome di regime di transizione. Quindi ragionando in termini di velocità critica abbiamo che per velocità inferiori a

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho r}$$

Il moto sarà laminare, per valori superiori sarà turbolento.

Ad esempio per il moto di acqua in un tubo circolare di raggio $r = 1 \text{ cm}$, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ed $\eta = 10^{-2}$ poiseuille la velocità critica sarà

$$v_c = 1200 \frac{10^{-2}}{10^3 \cdot 10^{-2}} = 1.2 \text{ m/s}$$

In generale la forza di attrito viscoso nel modello di proporzionalità con la velocità è data da

$$F_R = bv = K\eta v \quad (1)$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo mentre η è il coefficiente di viscosità del fluido.

Legge di Stokes

Limitiamo ora la nostra analisi fenomenologica ai casi in cui la forma dell'oggetto sia sufficientemente regolare e la sua velocità sufficientemente bassa affinché gli spostamenti di fluido provocati dal passaggio dell'oggetto in movimento non siano accompagnati da fenomeni vorticosi, cioè indagheremo solamente i moti laminari.

Con tale premessa e con l'aggiunta che il corpo sia dotato di simmetria intorno alla direzione del moto, si può dire che la forza resistente che il mezzo esercita al moto del corpo è direttamente proporzionale alla velocità:

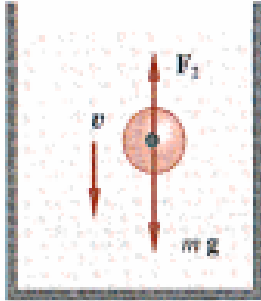
$$F_R \propto v^n$$

di solito la costante di proporzionalità – che dipende sia dalla forma dell'oggetto che dalle proprietà del fluido - viene indicata con la lettera b , quindi avremo:

$$F_R = bv^n$$

Discutiamo ora analiticamente i casi $n = 0$, $n=1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$.

Per iniziare semplificando l'approccio pensando al caso di un corpo di massa m che cada sotto l'azione della gravità in un mezzo viscoso.



L'equazione del moto è allora: $ma = mg - F_R = mg - b v^n$ (1 bis)

(avendo posto l'asse y verso il basso)

Posto che F_R non potrà essere maggiore di mg ma al massimo potrà essere uguale, nel qual caso si ha $ma = 0$ ossia $v = \text{cost}$, tale velocità è detta velocità limite ed in generale vale

$$v_L = \left(\frac{mg}{b} \right)^{1/n} \quad (2)$$

Se ora, come si usa, poniamo $\frac{m}{b} = \tau$ (detto tempo di rilassamento o tempo caratteristico)

si ha

$$v_L = (\tau g)^{1/n} \quad (3)$$

Anticipiamo il fatto che solo se $n < 1$ la soluzione analitica conduce a valori finiti per la velocità, in tutti gli altri casi la velocità tenderà asintoticamente, alla velocità limite.

Caso $n = 1$

L'equazione del moto è $ma = -bv$ (4)

In questo caso la forza motrice è assente: realisticamente significa che la forza motrice ha agito fino all'istante in cui scompare avendo impresso al corpo una certa velocità, come quando in una strada liscia (priva di attrito) un'auto spegne il motore, il fluido aria rallenterà il suo moto fino a fermarla.

Avremo

$$m \frac{dv}{dt} = -bv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v = -\frac{1}{\tau}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau}dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\log v + c_1 = -\frac{t}{\tau} + c_2$$

(N.B. Usiamo il simbolo log per indicare il logaritmo naturale)

Si possono senz'altro accorpare le due costanti avendo:

$$\log v = -\frac{1}{\tau}t + c$$

Imponendo che al momento iniziale sia $v = v_0$ e $t = t_0 = 0$ si ha

$$\log v_0 = c$$

$$\log v = -\frac{1}{\tau}t + \log v_0$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau}t$$

$$\frac{v}{v_0} = \exp(-t / \tau)$$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau};$$

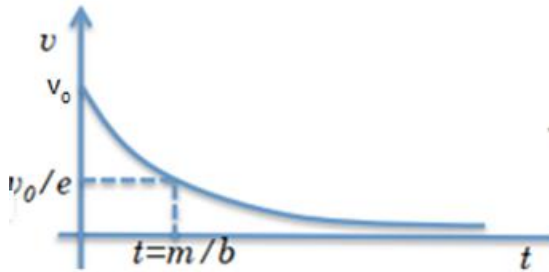
essendo $\tau = \frac{m}{b}$ (5)

Da questa relazione si vede subito il significato del parametro τ , infatti si ha

$$\begin{aligned}
 t = \tau & \quad v(t) = (1/e) v_0 = 0.37 v_0 \\
 t = 2\tau & \quad v(t) = (1/e)^2 v_0 = 0.14 v_0 \\
 t = 3\tau & \quad v(t) = (1/e)^3 v_0 = 0.12 v_0 \\
 t = 4\tau & \quad v(t) = (1/e)^4 v_0 = 0.018 v_0 \\
 t = 5\tau & \quad v(t) = (1/e)^5 v_0 = 0.0067 v_0 = 0.7\% v_0 \\
 & \dots \\
 t = 10\tau & \quad v(t) = 0.45 \cdot 10^{-3} v_0 \\
 t = 50\tau & \quad v(t) = 1.9 \cdot 10^{-22} v_0
 \end{aligned}$$

Spesso si prende come valore “asintotico” 5τ , valore per il quale la velocità vale meno dell’1% del valore iniziale, si vede comunque che ad esempio per $t = 50\tau$ la velocità è $10^{-22} v_0$.

Graficamente



Dal punto di vista matematico e non fisico dovremmo dire che occorre un tempo infinito affinché il corpo si arresti. Questo è uno dei quei casi in cui il senso fisico corregge il verdetto matematico. Ora risolviamo l’equazione del moto in funzione dello spostamento x .

$$m \frac{dv}{dt} = -bv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dt; \quad \text{sostituendo} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dx} dt = -\frac{1}{\tau} dt$$

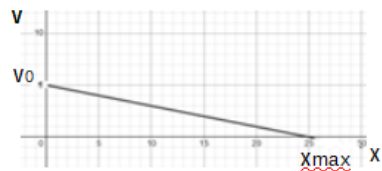
$$dv = -\frac{1}{\tau} dx$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$v - v_0 = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

E quindi

$$v(x) = v_0 - \frac{b}{m} (x - x_0) \quad (6)$$



Il cui andamento qualitativo è il seguente.

Da questa relazione possiamo calcolare la distanza che il corpo percorre prima di arrestarsi (dopo un tempo infinito);

$$x_{\max} = \tau v_0 = \frac{m}{b} v_0 \quad (7)$$

Dalla relazione di $v(x)$ infine esplicitiamo la legge oraria.

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{b}{m} x$$

$$\frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = dt$$

$$\int_0^x \frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{\log(v_0 - \frac{x}{\tau})}{\frac{1}{\tau}} \Bigg|_0^x = t$$

$$\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) \Bigg|_0^x = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) - \log v_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log \frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = e^{-t/\tau}$$

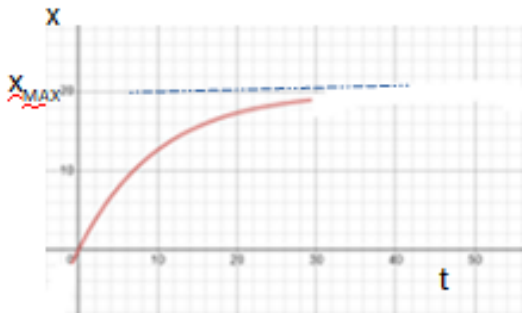
$$(v_0 - \frac{x}{\tau}) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$-\frac{x}{\tau} = v_0 e^{-t/\tau} - v_0$$

$$x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

Si noti che si poteva più agevolmente ricavarla dalla relazione $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

Il cui grafico qualitativo è il seguente



Nel caso il moto partisse all'istante zero con coordinata x_0 si avrebbe

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$

Esempio 1

Un oggetto di massa 5 kg, inizialmente fermo, è sottoposto ad un impulso $I = 10 \text{ N s}$. Quale distanza percorre prima di arrestarsi su un piano liscio orizzontale considerando l'attrito viscoso dovuto alla presenza di aria (la costante di rilassamento sia $\tau = 5 \text{ s}$)?

Calcoliamo la velocità che l'oggetto, sottoposto alla forza impulsiva di 10 N s , acquisterà

$$I = \Delta p = m \Delta v = m(v_f - v_i) = m v_f$$

$$v_f = I / m = 10 / 5 = 2 \text{ m/s}$$

Usando la relazione trovata della distanza massima percorsa da un oggetto sottoposto alla sola forza viscosa si ha

$$x_{\max} = \tau v_0 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m}$$

Osservazione: il modello ci informa della distanza percorsa dall'oggetto prima di fermarsi ma lo fa supponendo un tempo infinito, questo è un limite della nostra rappresentazione semplificata della realtà, infatti ad un certo punto quando la velocità si approssima allo zero intervengono altri fattori, quali ad esempio l'attrito statico, il moto browniano, ecc... che fanno arrestare l'oggetto in un tempo finito.

Caso $n = 1$

L'equazione del moto in questo caso è $ma = mg - b v$ (10)

Dove $(b v)$ è la forza di attrito viscoso, il coefficiente di proporzionalità è dato dal prodotto di due parametri $b = K \eta$ dove K è il fattore di forma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Considerando un moto con $v(t) = v_0$ per $t = 0$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg/b - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Sfruttando la (2): $mg/b = v_L$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v_L - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Ricordando che

$$\int \frac{dx}{A-x} = -\log(A-x) + \text{cost} \text{ si ha}$$

$$-\left[\log(v_L - v(t)) - \log(v_L - v_0)\right] = \frac{b}{m} t$$

$$\log \frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = v_L - (v_L - v_0)e^{-t/\tau} \quad (11)$$

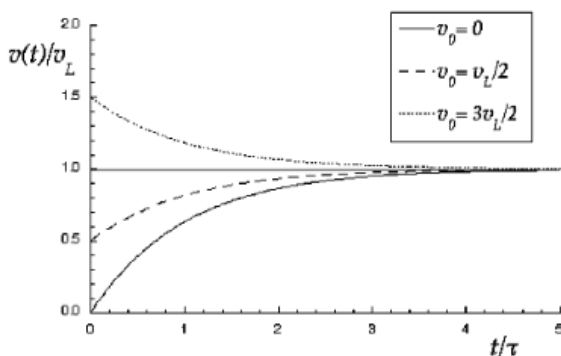
Oppure in termini del tempo di rilassamento

$$v(t) = \tau g - (\tau g - v_0)e^{-t/\tau} \quad (12)$$

Da cui vediamo che per $t \rightarrow \infty$ $v(t) \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$

Si noti come v_L sia indipendente dal valore della velocità iniziale. Il valore della costante di rilassamento dà una misura di quanto rapidamente il corpo raggiunge la velocità limite.

L'andamento della velocità normalizzata con la velocità limite, per diversi valori di v_0 , è mostrata di seguito – si noti in particolare che quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale maggiore di v_L , essa diminuirà progressivamente per raggiungere, asintoticamente, il valore v_L .



Un semplice ragionamento consente di ricavare direttamente il valore della velocità limite senza risolvere alcuna equazione differenziale. Supponiamo, per comodità, che il corpo sia lasciato, all'istante $t = 0$, con velocità nulla. Inizialmente, quindi, la forza di attrito ha modulo nullo e il corpo risente esclusivamente della forza di gravità, per cui accelera verso il basso con accelerazione g . All'aumentare della velocità, anche la forza di attrito aumenta e quindi il corpo presenta un'accelerazione via via minore. La condizione limite viene raggiunta quando la forza di attrito uguaglia esattamente (in modulo) la forza peso, per cui la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla. In queste condizioni il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme. Dall'uguaglianza delle due forze agenti sul corpo si ha (ed a quel punto la v diventa v_L):

$$ma = 0 = mg - b v_L$$

$$b v_L = mg \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$$

Ricaviamo l'espressione della velocità in funzione dello spostamento.

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{b}{m} v$$

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} v = dx$$

$$\text{sostituendo } \frac{m}{b} = \tau; \quad v_L = \frac{mg}{b} \equiv \tau g$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L - v} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

Ricordando che

$$\int \frac{x}{x-A} dx = -A \log(x-A) - x + \text{cost}$$

$$\frac{b}{m} x - \frac{b}{m} x_0 = -v_L \log(v - v_L) - v + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v - v_L) + v = -\frac{b}{m} x + \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v(x) - v_L) + v(x) = K - \frac{b}{m} x \quad (13)$$

$$K = \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

Si vede quindi che non è possibile ottenere una soluzione analitica in forma chiusa,

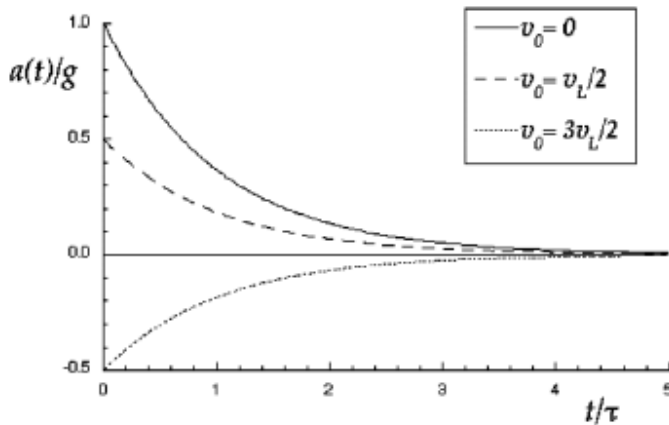
Cioè non è possibile ottenere esplicitamente $v = v(x)$ in quanto l'equazione contiene sia v che $\log(v - v_L)$, ma è possibile avere $x(v)$ oppure la curva in forma parametrica $(x(t), v(t))$, il che ci permette di avere un'idea abbastanza precisa di come vanno le cose.

Oppure si potrà procedere con metodi numerici.

Vediamo come vanno le cose per l'accelerazione, la possiamo ricavare derivando la (12)

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} [\tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}] = \frac{1}{\tau} (v_L - v_0) e^{-t/\tau} = \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Notiamo che l'accelerazione vale $(g - v_0/\tau)$ per $t = 0$ e tende ad annullarsi con legge esponenziale, governata dal parametro τ . L'andamento grafico, normalizzata con g , è il seguente.



Al fine di ricavare la legge oraria basta integrare la (12)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}$$

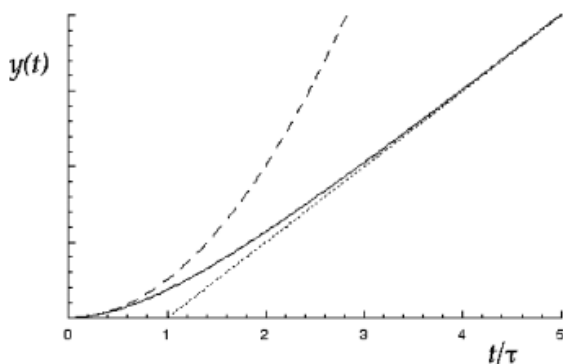
$$[v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt = dx$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t [v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt$$

$$x - x_0 = v_L t + (v_L - v_0) \tau (e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau (v_L - v_0) (e^{-t/\tau} - 1) \quad (15)$$

L'andamento, in funzione di t/τ è il seguente:



Dalla (15) si vede che per valori di t molto grandi l'andamento dello spostamento è lineare, infatti per t grandi la velocità assume un valore costante pari a v_L .

Si può notare, altresì, come per valori di t/τ molto piccoli, l'andamento sia simile a quello uniformemente accelerato che si avrebbe in assenza di forze di attrito (linea tratteggiata). Questo

fatto si può dimostrare partendo dall'espressione (15) – limitandoci per semplicità al caso di velocità iniziale nulla $v_0 = 0$ – ed approssimandola per valori molto piccoli di t/τ : In tale situazione, per l'esponenziale è lecito adottare uno sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine, cioè

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \text{ che sostituito nella (15) dà}$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau(v_L - v_0)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) \approx x_0 + v_L t + \tau(v_L)(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - 1) =$$

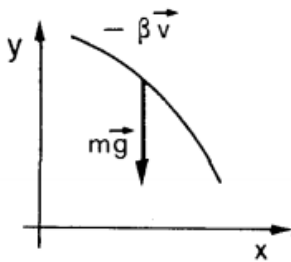
$$= x_0 + v_L t + \tau(v_L) \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) = x_0 + v_L t - \tau v_L \frac{t}{\tau} + \tau v_L \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2} =$$

$$= x_0 + v_L t - v_L t + \frac{1}{2} v_L \frac{t^2}{\tau} = x_0 + \frac{1}{2} \frac{mg}{b} \frac{b}{m} t^2 = x_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

Consideriamo il vettore $\mathbf{v}_0$ non perpendicolare al terreno, avremo così un moto in due dimensioni.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$$

Scegliamo un SR con l'asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto.



Avremo:

$$\begin{cases} -bv_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ -mg - bv_y = m \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{m}{b} \frac{dv_x}{dt} \\ mg + bv_y = -\frac{m}{b} \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (16)$$

Esse sono due equazioni differenziali disaccoppiate del tipo

$$A + v = -B \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

Essendo

$$\begin{cases} B = \frac{m}{b}; A = 0 & \text{per la prima della (16)} \\ B = \frac{m}{b}; A = \frac{mg}{b} & \text{per la seconda della (16)} \end{cases} \quad (18)$$

La (17) è un'equazione differenziale del primo ordine in $v(t)$ che si integra facilmente per separazione di variabili: cost

$$\frac{dv}{A+v} = -\frac{dt}{B}$$

$$\log(A+v) = -\frac{t}{B} + \text{cost}$$

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = Ce^{-t/B}$$

Sia $v = 0$ per $t = 0$,

allora avremo $C = A + v_0$, quindi la relazione precedente diventa

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = (A+v_0)e^{-t/B}$$

Ovvero

$$v(t) = (A+v_0)e^{-t/B} - A$$

Tenendo conto della (18) la soluzione è

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0,x} e^{-t/\tau} \\ v_y &= (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L \end{aligned} \quad (19)$$

Notiamo che all'aumentare del tempo la componente orizzontale della velocità diminuisce con legge esponenziale e tende a zero per valori grandi di t . La componente verticale, invece, qualunque sia il valore di $v_{0,y}$ per t grande tende al valore asintotico $v_L = -mg/b$, e vediamo che il suo valore è tanto più piccolo quanto più grande è il rapporto b/m : poiché fissato il fluido, il parametro b dipende solo dalla forma dell'oggetto, la velocità limite è tanto maggiore quanto più grande è la sua massa. Fissata invece la massa, la v_L è tanto minore quanto più grande è b .

Possiamo infine ricavare le equazioni orarie.

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_{0,x} e^{-t/\tau} dt; \quad \int_{y_0}^y dy = \int_0^t [(v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$x(t) = v_{0,x}(\tau - \tau e^{-t/\tau}) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

$$y(t) = y_0 + \tau[(v_L + v_{0,y}) - (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau}] - v_L t = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})(1 - e^{-t/\tau}) - v_L t$$

Troviamo per concludere l'equazione della traiettoria.

Isoliamo l'esponenziale dalla prima equazione e troviamo t in funzione di x :

$$x(t) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad e^{-t/\tau} = 1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad -\frac{t}{\tau} = \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right);$$

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)$$

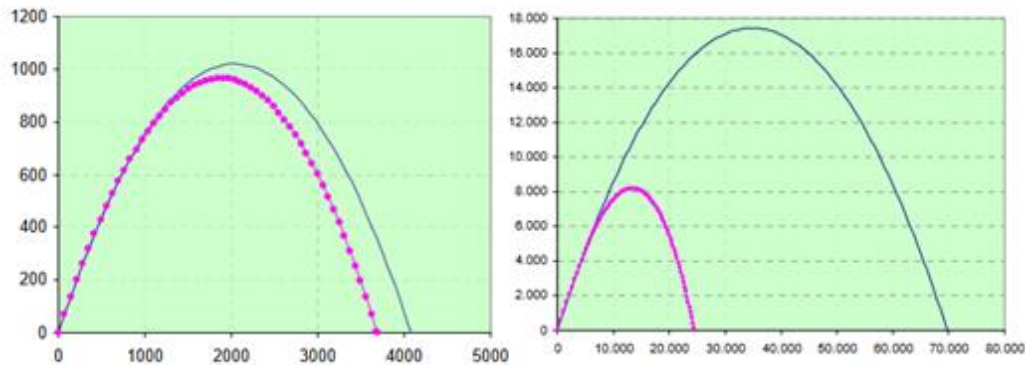
Sostituendo quindi questa espressione in $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})\left[1 - \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right] - v_L \left[-\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right]$$

Dunque l'equazione della traiettoria è

$$y(t) = y_0 + \frac{(v_L + v_{0,y})}{v_{0,x}} x(t) + \tau v_L \log \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x} \tau} \right) \quad (21)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



Traiettoria di un proiettile di artiglieria (calibro 155, 44kg, sparato a 45°) a sinistra con velocità iniziale 200m/s, a destra con velocità iniziale 827m/s. I punti rappresentano la traiettoria con resistenza dell'aria, le linee continue la traiettoria che avrebbe seguito in vuoto.

Esempio 2

Calcolare la velocità limite per le gocce d'acqua che cadono in presenza di aria.
(raggio = 10^{-5} m; $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s)

Per risolvere questo esercizio sarà utile richiamare la legge di Stokes che riguarda la forza di attrito viscoso a cui è soggetta una sfera in moto in un fluido con numero di Reynolds minore di 0.6: essa fu dedotta da George Stokes nel 1851. Costituisce un'applicazione al caso pratico della sfera della più generale legge di Newton-Stokes - la legge costitutiva dei fluidi a viscosità lineare.

La forza di resistenza detta anche forza di Stokes su una sfera è espressa dalla seguente relazione

$$F_R = bv = K\eta v = 6\pi r \eta v$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo, r è il raggio della sfera ed η è il coefficiente di viscosità (dinamica) del fluido, mentre v è la velocità relativa fra la sfera ed il fluido. Per forme geometrie semplici è possibile ricavare l'espressione di K, che nel caso della sfera vale $K = 6\pi r$

Mentre ad esempio per un cilindro che cade verticalmente con l'asse di simmetria verticale si ha:

$$K = 2\pi L (\log(L/r) - 0.5)$$

dove L è la lunghezza del cilindro ed r il suo raggio.

Non tenendo conto della forza di Archimede si ha (moto unidimensionale, asse y verso il basso)

$$ma = mg - bv \quad \text{a regime si ha}$$

$$v_L = \frac{mg}{b} = \frac{mg}{K\eta}$$

Occorre ricavare la massa della goccia $m = d \cdot V$

dove d è la densità dell'acqua, il cui valore è noto essere 10^3 kg/m^3 e V il volume della goccia che ricaviamo dalla relazione del volume di una sfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-5})^3 = \frac{4}{3} \pi 10^{-15} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 1.3 \pi \cdot 10^{-15} = 1.3 \pi 10^{-12} \text{ kg}$$

Quindi la velocità limite vale

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{1.3 \pi \cdot 10^{-12} \cdot 9.81}{6 \pi \cdot 10^{-5} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 1.25 \text{ cm/s}$$

Per gocce più grandi aventi raggio di 1 mm si ha

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 4.19 \cdot 10^{-9} = 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{4.19 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81}{6 \pi \cdot 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.1 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 460 \text{ km/h}$$

Consideriamo ora il contributo della forza di Archimede che è pari al peso del volume di fluido spostato. L'equazione del moto è ora

$$ma = mg - bv + F_A$$

Quando si raggiunge la condizione di regime l'accelerazione si annulla e si ha

$$bv_L = mg - F_A$$

$$v_L = \frac{mg - F_A}{K\eta}$$

$$\text{con } F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g$$

dove d_f è la densità del fluido che in questo caso è l'aria, quindi $d_f = 1.23 \text{ kg/m}^3$

Nel caso della goccia precedente ($r = 1 \text{ mm}$) si ha

$$F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 1.23 \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{-3})^3 \cdot 9.81 = 50.5 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$m = d_{\text{acqua}} \cdot V = d_{\text{acqua}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 10^3 \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.18 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{mg - m_f g}{K\eta} = \frac{4.18 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81 - 50.5 \cdot 10^{-9}}{6 \pi 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.07 \cdot 10^{-6} - 50.5 \cdot 10^{-9}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = \\ &= \frac{41.01 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 461 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Più elegantemente la velocità limite si può esprimerla nel seguente modo

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (d_{\text{acqua}} - d_{\text{aria}})$$

Per gocce con raggio di 0.5 mm si ha un valore più basso

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{(0.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9.81}{1.7 \cdot 10^{-5}} (1000 - 1.23) = 32 \text{ m/s} = 115 \text{ km/h}$$

Si tenga presente che i valori sperimentali della velocità limite che una goccia di pioggia può avere (con raggio compreso fra 0.25 mm e 4 mm (se più grande si spezza) variano da 8 km/h a 40 km/h.

Sono diversi i fattori che riducono drasticamente i valori precedentemente trovati con il nostro modello semplificato, si consideri ad esempio che valori maggiori di 10^{-4} m intervengono fattori di turbolenza e la dipendenza lineare dalla velocità non è più una ipotesi accettabile.

Esempio 3

Una particella di massa m viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 in presenza della gravità e di attrito viscoso. Siano noti i valori dell'accelerazione di gravità g , del coefficiente di resistenza viscosa K e del coefficiente di viscosità η . Calcolare il tempo a cui la particella raggiunge la quota massima e il valore di quest'ultima e confrontarli con il caso in cui l'attrito sia assente. Quale errore si fa nel trascurare l'attrito nel calcolo della quota massima?

In moto è puramente unidimensionale: scegliamo l'asse y rivolto verso l'alto.

Possiamo allora usare la seconda delle (19) considerando ora che v_0 ha solo componente y : $v_{0y} = v_0$

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \quad (a)$$

A partire da questa espressione possiamo ricavare il tempo, T , che passa dall'istante iniziale ($t=0$; $y=0$)

fino a quando la particella salendo rallenta fino a fermarsi $v(t) = 0$.

$$0 = (v_L + v_0)e^{-T/\tau} - v_L; \quad e^{-T/\tau} = \frac{v_L}{(v_L + v_0)}; \quad -\frac{T}{\tau} = \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right) \quad (b)$$

$$T = -\tau \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right)$$

Si noti che il tempo è sicuramente positivo in quanto il valore del logaritmo, avendo argomento minore di 1, è negativo.

Ricordando che $\tau = v_L/g$ si ha

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \quad (c)$$

Possiamo anche calcolare la quota massima raggiunta dalla particella usando la seconda delle (20), ponendo $y_0 = 0$ e $t = T$, a tal uopo integriamo la (a)

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L; \quad dy = [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$\int_0^{y_{\max}} dy = \int_0^T [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(1 - e^{-T/\tau})$$

Sfruttando la seconda relazione della (b)

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(e^{-T/\tau} - 1) = -v_L T + \tau(v_L + v_0) \left(1 - \frac{v_L}{(v_L + v_0)} \right)$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau v_0$$

$$y_{\max} = -v_L \frac{v_L}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \tau v_0$$

Che possiamo riarrangiare nel seguente modo

$$y_{\max} = -\frac{v_L^2}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \frac{v_L}{g} v_0$$

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (d)$$

Le soluzioni trovate per T e $y_{\max}$ possono essere confrontate con gli analoghi risultati del problema balistico in assenza di attrito. In tal caso, il tempo di salita, come noto, vale $T_0 = v_0/g$, che equivale a metà del tempo di volo in una traiettoria parabolica con ritorno alla stessa quota di partenza. Graficamente, il tempo v_0/g corrisponde all'intersezione della retta $v(t) = v_0 - gt$ con l'asse dei tempi nel diagramma t - v .

La quota massima è $y_{\max}' = v_0^2/(2g)$ e corrisponde all'area del triangolo sotteso dalla stessa retta (si veda la linea tratto-punto nella figura qui sotto).

Dunque, l'errore assoluto che si fa trascurando l'attrito è dato dalla differenza $\Delta y = y_{\max}' - y_{\max}$.

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (e)$$

Usando le espressioni precedenti, l'errore relativo diventa

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right]}{\frac{v_0^2}{2g}} \quad (f)$$

Facciamo un esempio numerico, sia $v_0 = 30$ m/s $v_L = 10$ m/s, si ha

$$y_{\max} = \frac{10 \cdot 30}{9.81} \left[1 - \frac{10}{30} \log \left(1 + \frac{30}{10} \right) \right] = 21.2 \text{ m}$$

$$y_{\max}' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 9.81} = 45.9 \text{ m}$$

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = 45.9 - 21.2 = 24.7 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{24.7}{45.9} = 54\%$$

Possiamo infine andare a verificare se le soluzioni trovate in presenza di viscosità convergono alle soluzioni note in assenza di viscosità. Per farlo occorre studiare il comportamento delle espressioni trovate nel caso in cui $K\eta \rightarrow 0$. Questo caso implica che sia $\tau \rightarrow \infty$ e $v_L \rightarrow \infty$ e dunque, per un qualsiasi valore ragionevole di v_0 e per tempi dell'ordine di T_0 (tempo di salita in assenza di attrito), si avrà $t/\tau \ll 1$ e $v_0/v_L \ll 1$. Si tratta quindi di andare a vedere come si comportano gli esponenziali del tipo e^{-x} ed i logaritmi del tipo $\log(1+x)$ per x piccoli.

[Qui si vede bene come l'esistenza di scale tipiche di tempi e di velocità permette di dare un significato fisico alla procedura di limite. Quando in fisica diciamo che un certo risultato deve essere ottenuto in un particolare limite in cui qualcosa diventa trascurabile, intendiamo che la soluzione generale deve assumere una forma nota quando una certa quantità è molto piccola rispetto ad una scala tipica fissata dai parametri del sistema. Individuare quale sia, di volta in volta, il "parametro piccolo" da usare come variabile in uno sviluppo in serie attorno ad un valore assegnato è una delle arti che si imparano nel mestiere del fisico].

Lo sviluppo di queste funzioni nell'intorno $x = 0$, come noto, è

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots; \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Quindi se prendiamo la velocità $v(t)$ data dalla (a) e tronciamo lo sviluppo dell'esponenziale al primo ordine nel parametro t/τ (piccolo), troviamo

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \rightarrow v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

sostituendo $\tau = v_L/g$ si ha

$$v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - g \frac{t}{v_L}\right) = v_0 - \left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)gt \quad \text{ed infine usando il fatto che } v_0/v_L \ll 1 \text{ si ha}$$

$$v(t) \approx v_0 - gt$$

Che corrisponde al moto balistico in assenza di attrito.

Analogamente possiamo prendere l'espressione del tempo di salita, dato dalla (c) e sviluppare il logaritmo, troncandolo al primo ordine nel parametro (piccolo) v_0/v_L , avendosi

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \rightarrow T \approx \frac{v_L}{g} \left(\frac{v_0}{v_L}\right) = \frac{v_0}{g} = T_0$$

Che di nuovo corrisponde al caso senza attrito, lo stesso vale per la quota massima raggiunta dal grave, infatti si ha dalla (d)

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)\right]; \rightarrow y_{\max} \approx \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \left(\frac{v_0}{v_L} - \frac{v_0^2}{2v_L^2}\right)\right] \frac{v_0^2}{2g} = y'_{\max}$$

Ne concludiamo che le soluzioni generali ottenute prima sono consistenti con quanto ci aspettiamo nel limite in cui l'attrito sia assente, notiamo che per trovare il limite corretto per la quota massima abbiamo dovuto usare un troncamento fino al secondo ordine.

Moto armonico con attrito viscoso

Dopo l'analisi del moto di un grave in presenza di attrito viscoso, dipendente linearmente dalla velocità, concludiamo questo caso studiandolo nel caso di moto armonico.

Consideriamo dunque un oscillatore che si muove armonicamente di moto unidirezionale.

Richiamiamo il concetto di moto oscillatorio ed armonico.

La differenza principale tra moto oscillatorio e moto armonico riguarda il tipo di movimento e le forze che lo causano. In pratica, il moto armonico è un caso particolare di moto oscillatorio. Vediamo le differenze in dettaglio:

1. Moto Oscillatorio

Il moto oscillatorio è un movimento in cui un oggetto si sposta avanti e indietro attorno a una posizione di equilibrio in modo periodico. Questo tipo di movimento può essere causato da diverse forze, ma non necessariamente deve seguire una legge matematica semplice come quella del moto armonico.

Esempi di moto oscillatorio che non sono armonici:

Un pendolo con smorzamento (quando l'attrito è presente).

Un corpo attaccato a una molla con forze non lineari.

In generale, il moto oscillatorio può essere descritto come periodico, ma le forze che lo causano possono essere non lineari o non conservative, il che significa che la forma dell'oscillazione potrebbe non essere perfettamente sinusoidale.

2. Moto Armonico

Il moto armonico è un tipo di moto oscillatorio molto specifico in cui l'oggetto si muove in modo periodico seguendo una traiettoria che può essere descritta matematicamente da una funzione sinusoidale (o cosinusoidale).

Questo movimento si verifica quando la forza che richiama l'oggetto verso la posizione di equilibrio è proporzionale e opposta allo spostamento dell'oggetto stesso. La relazione tra la forza e lo spostamento segue la legge di Hooke.

Matematicamente, il moto armonico può essere descritto con l'equazione:

$$F = -kx$$

Dove:

F è la forza di richiamo

k è la costante elastica (di una molla, ad esempio)

x_0 è lo spostamento dalla posizione di equilibrio (ampiezza iniziale).

Esempi di moto armonico:

Un oggetto attaccato a una molla che oscilla senza smorzamento (senza resistenza dell'aria o attrito).

Un pendolo semplice con piccole oscillazioni (dove il movimento è quasi armonico, in quanto la forza gravitazionale può essere approssimata come proporzionale allo spostamento per angoli piccoli).

Tutti i moti armonici sono oscillatori, ma non tutti i moti oscillatori sono armonici. Il moto armonico è una forma ideale di moto oscillatorio che avviene quando la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, mentre il moto oscillatorio è un concetto più ampio che include anche movimenti che non seguono la legge di Hooke o che sono influenzati da forze dissipative.

La legge del moto è quella del moto armonico con il più il termine della forza viscosa $F_R = bv$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b\dot{x} \text{ ovvero}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

E' comodo introdurre due parametri che si riveleranno essere molto utili nella discussione della soluzione e cioè la *pulsazione propria* dell'oscillatore $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e il coefficiente di smorzamento

$\gamma = \frac{b}{2m}$, con tali sostituzione l'equazione (22) diventa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22)$$

Trattasi di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che ammette dunque una soluzione generale del tipo

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (23)$$

Dove a e B sono due costanti di integrazione determinabile attraverso le condizioni iniziali; mentre α_1 e α_2 sono le soluzioni della seguente equazione algebrica associata

$$\alpha^2 + (2\gamma)\alpha + \omega_0^2 = 0$$

risolvendo

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (24)$$

Le caratteristiche del moto risultano diverse a seconda che α_1 e α_2 siano reali o complesse, cioè a seconda del segno del discriminante, si possono avere tre casi possibili.

Smorzamento forte

$$\text{Caso } \Delta > 0; \quad \gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{ossia} \quad \frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m}; \rightarrow \underline{b^2 > 4mk}$$

In questo caso le due radici α_1 e α_2 sono reali ed entrambe negative, la soluzione in questo caso è la somma di due esponenziali decrescenti

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = Ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (25)$$



Smorzamento critico

Caso $\Delta = 0$; $\gamma^2 = \omega_0^2$ ossia $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{K}{m} \rightarrow \underline{b^2 = 4mk}$

Le due radici α_1 e α_2 sono coincidenti e negative: $\alpha_{1,2} = -\gamma$

Si dimostra in tal caso che la soluzione diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (26)$$

Avendo un andamento qualitativamente simile al caso precedente.



Smorzamento debole

Caso $\Delta < 0$; $\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$; ossia $\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2} \rightarrow \underline{b^2 < 4mk}$

Essendo il discriminante negativo le soluzioni saranno immaginarie

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

che sostituito alla (23) ci dà

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

Utilizzando la formula di Eulero $e^{\pm i\omega} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ si ha

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t} ((A+B)\cos \omega t + i(A-B)\sin \omega t)$$

Il risultato di questa espressione deve essere reale (poiché lo spostamento $x(t)$ è una grandezza reale) e questo comporta che i coefficienti A e B devono essere complessi coniugati e diversi fra loro.

Quindi si deve avere

$$A = a + ib; \quad B = a - ib \quad A = a + ib; \quad B = a - ib \quad \rightarrow A + B = 2a, \quad A - B = 2ib$$

Sostituendo nella (26) si ha

$$x(t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t + i(2ib) \sin \omega t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t)$$

Dove a e b sono due costanti di integrazione determinabili con la conoscenza delle condizioni iniziali, ossia della posizione e velocità all'istante $t = 0$; a tal uopo si pone:

$$2a = C_0 \sin \varphi; \quad 2b = C_0 \cos \varphi$$

dove ora C_0 è una costante che non rappresenta più la posizione iniziale ma è ad essa legata dalla relazione

$$C_0 = x(0) \sin \varphi,$$

Arriviamo così alla soluzione canonica:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi)$$

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi) \quad (27)$$

Con le costanti di integrazioni C_0 e φ . La fase istantanea è: $\theta(t) = (\omega t + \varphi)$ indica il punto dell'oscillazione in cui si trova in corpo oscillante al tempo t.

$$\text{Ad esempio se } \varphi = 0 \text{ si ha } x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t) \rightarrow x(0) = 0$$

ci dice che l'oscillatore inizia il moto dall'origine, se invece lo sfasamento iniziale è di 90° $\varphi = \pi / 2$ si ha

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \pi / 2) = C_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t) \rightarrow x(0) = C_0$$

l'oscillatore inizia il moto dal punto di massima elongazione (ampiezza iniziale = C_0).

la costante C_0 rappresenta l'ampiezza iniziale "massima possibile" dell'oscillazione in assenza di smorzamento. Essa è anche nota come "ampiezza iniziale modulata": il valore massimo dell'ampiezza che l'oscillazione avrebbe all'istante iniziale $t=0$ se non fosse per il termine esponenziale di smorzamento.

Nel grafico della funzione $x(t)$, la fase si può interpretare come lo sfasamento tra l'oscillazione attuale e un'oscillazione di riferimento (come $\sin(\omega t)$ senza fase iniziale).



Concludendo notiamo come l'attrito viscoso riduce la pulsazione rispetto al caso libero. La (26) rappresenta una sinusoide di ampiezza $x_0 e^{-\gamma t}$, cioè di ampiezza decrescente esponenzialmente con il tempo.

Esempio 4

Un blocco di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ è collegato a una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$ e può oscillare orizzontalmente su una superficie senza attrito. Il blocco è immerso in un mezzo viscoso che esercita una forza di smorzamento proporzionale alla velocità, di forma $F_v = -bv$, con $b = 1 \text{ kg/s}$.

- Calcola la frequenza angolare naturale dell'oscillatore (in assenza di smorzamento) e il coefficiente di smorzamento critico b_{crit} .
- Determina la frequenza angolare dell'oscillatore smorzato.
- Trova l'andamento della posizione $x(t)$ nel tempo se il blocco viene spostato di una distanza $x_0 = 0.1 \text{ m}$ dalla posizione di equilibrio e poi rilasciato senza velocità iniziale.
- Calcola il tempo $t_{1/2}$ dopo il quale l'ampiezza si riduce a metà rispetto al valore iniziale x_0 .

Per risolvere questo banale esercizio è sufficiente applicare le varie formule direttamente.

La frequenza naturale dell'oscillatore è

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.5}} = 14.14 \text{ s}^{-1}$$

Il coefficiente di smorzamento critico vale

$$b_{\text{rit}} = 2m\omega_0 = 2 \cdot 0.5 \cdot 14.14 = 14.14 \text{ kg/s}$$

La frequenza angolare dell'oscillatore immerso nel mezzo viscoso vale

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{14.14^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0.5}\right)^2} = 14.10 \text{ s}^{-1}$$

L'andamento nel tempo della posizione dell'oggetto è data dalla relazione (26)

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

che nel nostro caso, essendo la fase iniziale pari a zero, diventa

$$x(t) = x_0 e^{-8b/2m t} \cos \omega t = 0.1 e^{-(1/2 \cdot 0.5)t} \cos(14.10t) = 0.1 e^{-t} \cos(14.10t)$$

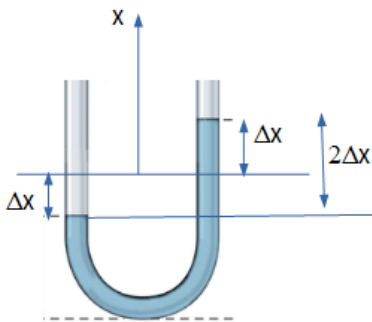
Il tempo $t_{1/2}$ è il tempo per cui l'ampiezza $x(t)$ si riduce della metà del suo valore iniziale. Ricordando che l'ampiezza del moto oscillatorio è dato dal fattore $x_0 e^{-(b/2m)t}$, si ha

$$x(t_{1/2}) = \frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-(b/2m)t_{1/2}} \rightarrow t_{1/2} = \frac{2m}{b} \log 2 = \frac{2 \cdot 0.5}{1} 0.69 = 0.69 \text{ s}$$

N.B Si pensi ad esempio all'ammortizzatore delle automobili, esso è una molla (con un opportuno valore della costante elastica) immersa in un fluido con opportuna viscosità tale che quando è sollecitata non compia oscillazioni, anzi si vuole proprio che lavori in regime di smorzamento critico in modo da portarsi a zero più velocemente possibile.

Esempio 5

Un tubo di vetro a sezione costante ($S = 1 \text{ cm}^2$) è piegato ad U: esso è disposto verticalmente e contiene una massa m d'acqua, che occupa la lunghezza di $L = 1 \text{ m}$. In uno dei due rami il livello d'acqua viene abbassato di $h = 10 \text{ cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio con una opportuna pressione che all'istante $t = 0 \text{ s}$ viene annullata. Ricavare l'equazione del moto della massa d'acqua. Supponiamo poi che la massa d'acqua nel suo moto oscillatorio che si instaura sia sottoposta ad attrito proporzionale alla velocità con coefficiente $b = 0.6 \text{ kg/s}$. Verificare in queste condizioni che il moto risulta debolmente smorzato e scrivere la nuova equazione del moto.



La massa d'acqua è $m = \rho V = \rho(S \cdot L) = 10^3(10^{-4} \cdot 1) = 0.1 \text{ kg}$

Quando il livello dell'acqua è spostato di un dislivello Δx rispetto alla posizione di equilibrio, si instaura una forza di richiamo dovuta alla differenza di pressione tra i due rami. Questa forza è causata dalla differenza di peso delle colonne d'acqua nei due rami del tubo, e può essere espressa come (ricordando che la pressione idrostatica di un liquido di altezza h è $P = \rho gh$)

$$F = \Delta P \cdot S = \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S$$

Questa forza di richiamo è a tutti gli effetti una forza elastica, per cui possiamo scrivere

$$F = -k\Delta x \equiv \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S \rightarrow$$

$$k = 2\rho g S = 2 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10^{-4} = 1.96 \text{ N / m}$$

L'equazione del moto è

$$F \equiv m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \Delta x; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{L} \Delta x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un'oscillazione armonica semplice, con pulsazione naturale:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.96}{0.1}} = 4.43 \text{ s}^{-1} \text{ e periodo}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{1.96}} = 1.42 \text{ s}$$

Si osservi che questo periodo è uguale a quello di un pendolo semplice lungo $L/2$.

La cui soluzione come noto è

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Con velocità data da

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega_0 t + \varphi)] = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Con A e φ da determinarsi dalle condizioni iniziali che sono $x(0) = h$; $v(0) = 0$

$$x(0) = h = A \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = A \cos \varphi = 0.1 \text{ m}$$

$$v(0) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0$$

Dalla seconda si vede che dovendo essere nullo il prodotto, l'unico termine che può assumere il valore nullo è il seno, per cui dovrà essere $\varphi = 0$ ed allora dalla prima equazione si ha

$$A \cos 0^\circ = 0.1 \rightarrow A = 0.1 \text{ m} \quad \text{e l'equazione del moto, senza attrito, diventa}$$

$$x(t) = 0.1 \cos(4.43t)$$

In presenza di attrito al fine di determinare, in quale dei tre casi discussi sopra si ricade, applichiamo i criteri visti sopra, si ha:

$$b = 0.6; \quad b^2 = 0.36$$

$$4km = 4 \cdot 1.96 \cdot 0.1 = 0.78 \rightarrow b^2 < 4km$$

Quindi siamo nel caso di smorzamento debole.

Ricaviamo la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.6}{2 \cdot 0.1} = 3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{4.43^2 - 3^2} = 3.26 \text{ s}^{-1}$$

L'equazione del moto, come visto sopra, in questo caso è

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

E la velocità è

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)) = C_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Troviamo le due costanti imponendo $x(0) = h$ e $v(0) = 0$.

$$x(0) = C_0 \sin \varphi = h$$

$$v(0) = C_0 [-\gamma \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)] = 0$$

Risolvendo questo sistema si ottiene

$$C_0 = 0.136 m$$

$$\varphi = 0.827^{rad}$$

L'equazione del moto è

$$x(t) = 0.136 e^{-3t} \sin(\omega t + 0.827^{rad})$$

Notiamo che la costante di tempo dell'esponenziale $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3} = 0.33 s$ è molto più piccola del

periodo delle oscillazioni smorzate $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.26} = 1.93 s$ per cui ad esempio dopo un tempo pari essendo $T > 5\tau = 1.65 s$ il moto è praticamente terminato.

Caso $n = 1/2$

L'equazione del moto, nel caso di assenza di una forza attiva, è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b\sqrt{v} \quad (28)$$

La forza di attrito viscoso, di solito, è proporzionale alla velocità dell'oggetto in movimento attraverso un fluido, secondo la legge di Stokes, oppure al quadrato della velocità nei regimi turbolenti. Tuttavia, esistono condizioni particolari in cui l'attrito può essere proporzionale alla radice quadrata della velocità. Questo si verifica in situazioni intermedie tra il regime laminare e il regime turbolento, chiamato regime di transizione.

Dettagli del regime di transizione

In un fluido, il passaggio tra il regime laminare e quello turbolento avviene per numeri di Reynolds intermedi, solitamente attorno a $Re \approx 1000$. In questa fase, il comportamento dell'attrito viscoso è più complesso e la sua dipendenza dalla velocità non è lineare. La dipendenza della forza di attrito può variare con la radice quadrata della velocità per:

Scorrimento su superfici porose o ruvide: quando la superficie di contatto non è completamente liscia, il flusso attorno all'oggetto si distorce, causando una dipendenza non lineare che talvolta è approssimabile alla radice quadrata della velocità.

Fluido a densità variabile: in alcuni fluidi con densità non uniforme o variabile in funzione della velocità (come schiume o liquidi non newtoniani), il rapporto tra attrito e velocità può risultare alterato.

Flusso con oscillazioni: in presenza di flussi oscillanti o con piccoli vortici localizzati, l'attrito può assumere una forma intermedia con dipendenza non lineare, dove il termine radice quadrata può comparire come approssimazione.

Flusso prossimo alla separazione: nelle zone dove il flusso inizia a distaccarsi dalla superficie (tipico di forme poco aerodinamiche), la forza di attrito si discosta dal comportamento lineare o quadratico, tendendo verso una proporzionalità alla radice quadrata della velocità.

Modelli di attrito viscoso nel regime di transizione

In questi casi particolari, la modellazione della forza di attrito può richiedere correzioni empiriche, che talvolta includono un termine in $v^{1/2}$ tuttavia, la dipendenza esatta dell'attrito viscoso in questi casi è difficile da modellare con precisione teorica e viene spesso determinata sperimentalmente.

Integrando la (28) si ha

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -b\sqrt{v}; \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt; \quad 2\sqrt{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{b}{m} t \\ 2\sqrt{v} &= 2\sqrt{v_0} - \frac{b}{m} t; \quad \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{b}{2m} t; \\ \sqrt{v} &= \sqrt{v_0} - \frac{t}{2\tau} \quad (\tau = m/b) \quad (29) \end{aligned}$$

Al fine di ottenere la $v(t)$ osserviamo che l'equazione non può essere elevata al quadrato perché si perderebbe dell'informazione! Occorrerà invece considerare che la $v(t)$ può essere pensata provenire dall'estrazione di radice della seguente espressione:

$$v = \left(\sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t \right)^2 \rightarrow \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t$$

Analizziamo l'aspetto matematico di questa relazione. Poniamo per compattezza di scrittura

$$v = y, \quad t = x; \quad \sqrt{v_0} = a, \quad \frac{1}{2\tau} = b \quad \text{avendosi}$$

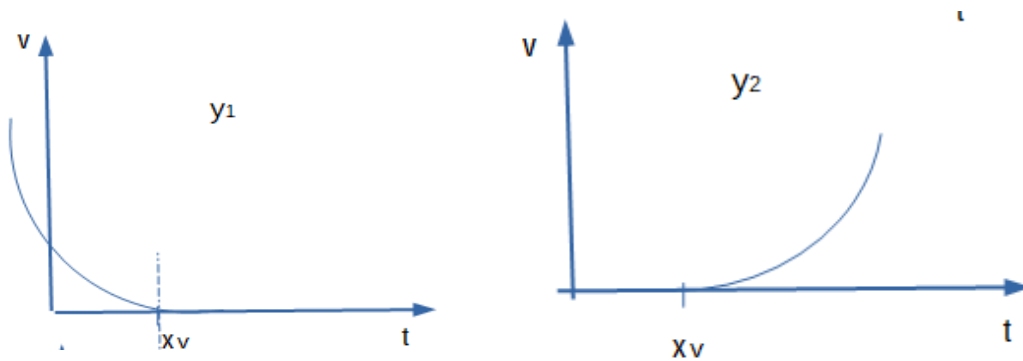
$$y = (a - bx)^2$$

Estraendo la radice quadrata abbiamo due funzioni

$$y_1 \rightarrow +\sqrt{y} = a - bx \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y \geq 0$$

$$y_2 \rightarrow -\sqrt{y} = a - bx \quad \text{ossia} \quad \sqrt{y} = bx - a \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y < 0$$

Graficamente è immediato vedere che esse rappresentano le due metà di una parabola avente vertice ($x_v = a/b$; $y_v = 0$)



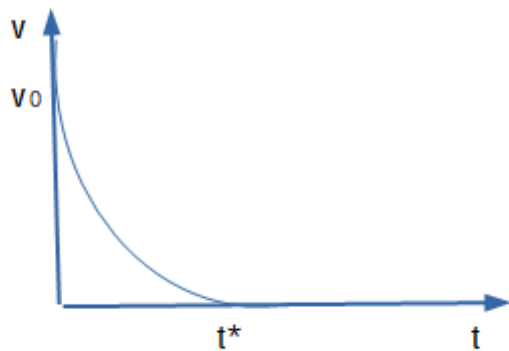
Il vertice è allora

$$x_{\text{Vertice}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{v_0}}{1/2\tau} = 2\tau\sqrt{v_0}$$

L'intervallo dei valori della velocità è $0 \leq v \leq v_0$.

E' ovvio che dobbiamo scartare la y_2 in quanto fisicamente significherebbe che il corpo una volta arrestatosi, di propria iniziativa, cioè senza nessuna forza agente, si rimetta in moto. Dunque la nostra funzione è

$$v(t) = \frac{1}{4\tau^2} t^2 - \frac{\sqrt{v_0}}{\tau} t + v_0; \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2\tau\sqrt{v_0} \quad (29)$$



Dove $t^* = 2\tau\sqrt{v_0}$ è il tempo di arresto.

Determiniamo l'espressione dei $v(x)$.

$$m \frac{dv}{dt} = -b\sqrt{v}; \quad m \frac{dv}{dx} v = -b\sqrt{v}; \quad \frac{v}{\sqrt{v}} dv - \frac{1}{\tau} x = -\frac{1}{\tau} dx; \quad \int_{v_0}^v \frac{v}{\sqrt{v}} dv = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx =$$

$$= \frac{2}{3} v^{3/2} - \frac{2}{3} v_0^{3/2} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{1}{\tau} x_0$$

$$\frac{2}{3} v^{3/2} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{x_0}{\tau} + \frac{2}{3} v_0^{3/2}$$

$$v^{3/2} = -\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}$$

$$v(x) = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2} \quad (30)$$

Da questa relazione possiamo determinare la distanza massima percorsa dal corpo prima di arrestarsi, basta porre $v(x) = 0$

$$0 = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}$$

$$\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right) = 0$$

$$x_{\max} = x_0 + \frac{2\tau}{3} v_0^{3/2} \quad (31)$$

Infine determiniamo l'equazione del moto

$$v(x) \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} = dt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} = \int_0^t dt$$

Per semplificare la scrittura poniamo

$$B = \frac{3}{2\tau}; A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{(A - Bx)^{2/3}} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{3}{B} \sqrt[3]{(A - Bx)} \Big|_{x_0}^x = t$$

$$\sqrt[3]{(A - Bx)} - \sqrt[3]{(A - Bx_0)} = -\frac{B}{3} t$$

$$\sqrt[3]{(A - Bx)} = -\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A - Bx_0)}$$

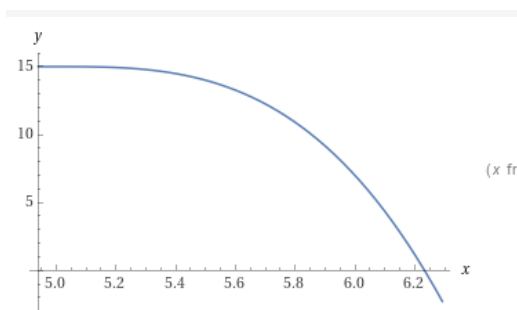
$$A - Bx = \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A - Bx_0)} \right]^3$$

$$Bx = A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A - Bx_0)} \right]^3$$

$$x(t) = \frac{1}{B} \left\{ A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A - Bx_0)} \right]^3 \right\}$$

$$x(t) = \frac{A}{B} - \frac{\left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A - Bx_0)} \right]^3}{B}; \text{ con } B = \frac{3}{2\tau}; A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2} \quad (32)$$

Il cui grafico qualitativo è il seguente.



Per controprova si vede che sostituendo nella (32) $t = t_{\max} = 2\tau v_0$ si riottiene la distanza massima data dalla (31).

Se è presente una forza gravitazionale l'equazione del moto diventa

$$m \frac{dv}{dt} = mg - b\sqrt{v} \text{ integrando si ha}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v} : \frac{dv}{\left(g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v}\right)} = dt; \quad \tau \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) - 2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) = \frac{1}{\tau} t + \left[2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \right]$$

$$(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v(t)}) + \sqrt{v(t)}) = \frac{1}{2\tau} t + (g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \quad (33)$$

Quest'ultima relazione ci dice come varia la velocità nel tempo, solo che non è possibile esplicitarla nella forma $v(t) = f(t)$.

Per ottenere l'equazione del moto basta integrarla!!!

Caso $n = 2$

La relazione di dipendenza quadratica dalla velocità per moti viscosi viene utilizzata in fluidodinamica quando il regime di moto è caratterizzato da una dominanza degli effetti inerziali rispetto a quelli viscosi, tipicamente associata a numeri di Reynolds elevati. Questo tipo di relazione è generalmente espresso come una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità:

$$F_R = \frac{1}{2} \rho C_x A v^2$$

Dove ρ è la densità del fluido, C_x è il coefficiente di resistenza aerodinamica già descritto nel punto 2 della nota iniziale, A è un'area di riferimento, spesso coincide con la sezione trasversale del corpo mentre v è la velocità del corpo rispetto al fluido. Tale relazione viene usata nel caso di numeri di Reynolds elevati, nel qual caso gli effetti inerziali del flusso diventano predominanti ed il moto è generalmente turbolento e la relazione lineare con la velocità diviene trascurabile. Inoltre viene usata per oggetti come automobili, aeroplani, proiettili o veicoli spaziali in atmosfera, dove la resistenza quadratica domina perché la velocità è sufficientemente elevata.

Come per gli altri casi partiamo supponendo assente la forza attiva sul corpo.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{b}{m} dt \equiv -\frac{1}{\tau} dt$$

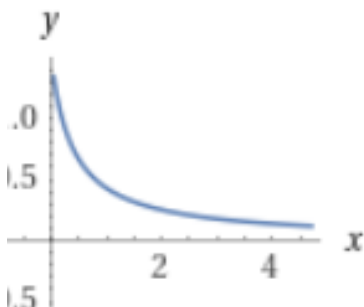
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{1}{\tau} t$$

$$-\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{\tau} t$$

$$v(t) = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} \quad (34)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



La velocità in funzione dello spazio è

$$m \frac{dv}{dx} v = -bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dx$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$v(x) = v_0 e^{-(x-x_0)/\tau} \quad (35)$$

L'equazione del moto è

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} dt$$

$$x - x_0 = -\frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} \Big|_0^t$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} + \frac{v_0 \tau \log \tau}{v_0}$$

$$x(t) = x_0 - \tau \log(\tau - v_0 t) + \tau \log \tau$$

$$x(t) = x_0 + \log \left(\frac{\tau}{\tau - v_0 t} \right) \quad (36)$$

Vediamo ora il caso in cui sia presente una forza agente sul corpo, che supponiamo essere la forza peso.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \quad (37)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} = dt$$

$$\frac{\tau dv}{g\tau - v^2} = dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

Avendo ricordato la relazione (3) che ora vale $v_L = (g\tau)^{1/2}$.

L'integrale vale

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v + v_L)}{(v - v_L)} \right| \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| \quad \text{per cui abbiamo}$$

$$\frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| = \frac{1}{\tau} t$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = \frac{2v_L}{\tau} t + \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\text{ponendo } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = at + b$$

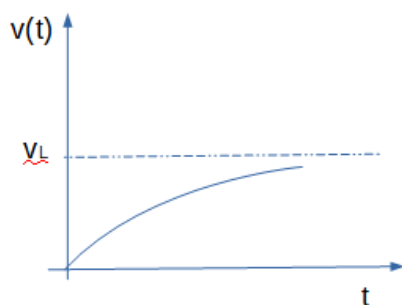
$$\frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} = e^{at+b}$$

Con qualche ulteriore passaggio si arriva all'espressione della velocità in funzione del tempo.

$$v(t) = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} \quad (38)$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

Il cui andamento è il seguente



La (38) può anche essere espressa in termini di tangente iperbolica (ricordando che

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$) nel seguente modo.

$$v(t) = v_L \tanh \left[\left(\frac{v_L}{\tau} t \right) + \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_L} \right] \quad (39)$$

Nel caso $v_0 = 0$ diventa.

$$v(t) = v_L \tanh \left(\frac{v_L}{\tau} t \right) \quad (39')$$

Ricaviamo la velocità in funzione dello spazio.

$$m \frac{dv}{dx} v = mg - bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} v = dx$$

$$\frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} dx$$

Ricordando che l'integrale vale

$$\int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \log |a^2 - x^2| + C \text{ si ha}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$-\frac{1}{2} \log(v_L^2 - v^2) + \frac{1}{2} \log(v_L^2 - v_0^2) = \frac{1}{\tau} x - \frac{1}{\tau} x_0$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -\frac{2}{\tau} x + \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -ax + b$$

$$(v_L^2 - v^2) = e^{-ax+b}$$

$$v(x) = \sqrt{v_L^2 - e^{-ax+b}} \quad (40)$$

$$\text{con } a = \frac{2}{\tau}; \quad b = \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

Vediamo che per x grande la velocità tende v_L , come ci si aspettava.

Il grafico è del tutto simile a quello precedente.

Infine ricaviamo la legge oraria, riprendendo la (38).

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1}$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_L \int_0^t \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$x - x_0 = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t \right]_0^t = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right]$$

$$x(t) = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right] + x_0 \quad (41)$$

A cui si vede che per $t = 0$ si ha $x(0) = x_0$ mentre per t grande $x(t)$ cresce praticamente in modo lineare con il tempo.

In termini della costante di tempo si ha:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{(2t/\tau)+b} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (42)$$

Nel caso $v_0 = 0$ si ha $b = 0$ e l'espressione diventa:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{2t/\tau} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (43)$$

Se $v_0 = 0$ in termini di coseno iperbolico dalla (39') si ha:

$$x(t) = x_0 + \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \quad (43')$$

Esempio 6

Si abbiano due sfere, una di legno ed una di acciaio, con densità rispettivamente di 500 e 8000 kg/m³ e raggio di 1 cm, in caduta libera; assumendo la densità dell'aria pari a 1.23 kg/m³ ed un coefficiente di penetrazione $C = 0.5$, si calcoli la velocità limite delle sfere ed a quale distanza di caduta si raggiungono tali valori, rappresentare inoltre il grafico della legge oraria, assumendo che partano da ferme da un'altezza di 10 metri.

Consideriamo che per oggetti macroscopici e/o velocità abbastanza grandi la forza di resistenza viscosa si può scrivere come $F_R = \frac{1}{2} C \rho S v^2$

Dove ρ è la densità del fluido, S è la "sezione frontale" (per una sfera di raggio R è $S = \pi R^2$) e C è il "coefficiente di penetrazione" (per le automobili è chiamato comunemente C_x) che in generale dipende dalla velocità ($C=C(v)$) ma che si può di norma approssimare con una costante.

Scriviamo l'equazione del moto

$$ma = mg - \frac{1}{2} C \rho S v^2 \quad (a)$$

Quando all'aumentare della velocità di caduta F_R raggiunge un valore uguale alla forza peso $ma = 0$ e si raggiunge la velocità limite che vale:

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}$$

Notiamo preliminarmente che sarà lecito trascurare la resistenza dell'aria quando la forza peso predomina sulla forza di attrito, ossia quando

$$F_R \equiv \frac{1}{2} C \rho S v^2 \ll mg \rightarrow v \ll \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \equiv v_L \quad (b)$$

Per capire se è lecito trascurare la resistenza dell'aria, senza risolvere l'equazione (a), si può calcolare la velocità massima che sarebbe raggiunta in assenza d'aria e verificare se questa velocità soddisfa la (b). Se ciò avviene, è lecito trascurare la presenza dell'aria, altrimenti bisogna aspettarsi correzioni più o meno grandi a seconda di quanto è violata la (b).

E' facile convincersi che $v \rightarrow v_L$ indipendentemente dalla velocità iniziale, perciò ogni corpo, libero di muoversi in aria, raggiunge una velocità limite se ne ha il tempo, ovvero se cade da un'altezza sufficiente. Ora "lavoriamo" sulla (b) per esprimerla in funzione del raggio e densità delle sfere.

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} V_{sfera} g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} \frac{4}{3} \pi R^3 g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}}$$

Da questa relazione vediamo che v_L aumenta con l'aumentare delle dimensioni (del raggio della sfera) e della sua densità: i corpi più grandi e/o pesanti cadono più velocemente.

Calcoliamo le velocità limite per le due sfere.

Sfera di legno:

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 500}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 14.6 \text{ m/s} = 52.5 \text{ km/h}$$

Sfera di acciaio

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 8000}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 58.3 \text{ m/s} = 209.9 \text{ km/h}$$

Nel vuoto, quindi senza forza di attrito dell'aria la velocità limite si raggiunge dopo una distanza data dalla relazione del moto rettilineo accelerato $v^2 = 2ax$ (nel nostro caso $a = g$),

Sfera di legno

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{14.6^2}{2 \cdot 9.81} = 10.8 \text{ m}$$

Sfera di acciaio

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{58.3^2}{2 \cdot 9.81} = 173 \text{ m}$$

Quindi per dar modo alla sfera di legno di raggiungere la velocità limite essa deve cadere da almeno una altezza di 10.8 m, perciò se cade da un'altezza inferiore è lecito trascurare la resistenza dell'aria, stesso discorso, con numeri diversi, vale per la sfera di acciaio.

L'equazione del moto, essendo nulla la velocità iniziale è data dalla (43').

Si noti che dall'equazione (39') risulta che il tempo occorrente per raggiungere la velocità limite è infinito, infatti:

$$v(t) = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) \rightarrow v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) = 1$$

Come noto la tangente iperbolica tende ad 1 quando il suo argomento tende ad infinito.

Ma possiamo calcolare il tempo necessario per raggiungere ad esempio $0.99 v_L$, usando l'uguaglianza $\frac{v_L}{\tau} = \frac{g}{v_L}$;

$$v(t) \equiv 0.99 v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{g}{v_L} t\right) = 0.99 \rightarrow \frac{g}{v_L} t = 2.65$$

Sfera di legno

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 14.6}{9.81} = 3.94 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.8}{9.81}} = 1.48 \text{ s}$$

Sfera di acciaio

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 58.3}{9.81} = 15.7 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 173}{9.81}} = 5.9 \text{ s}$$

Infine calcoliamo quale distanza percorrono le sfere con tali tempi.

Sfera di legno

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{14.6^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{14.6} 3.94)) \\
 &= 21.73 \log(\cosh(2.65)) = 21.73 \log(1.63) = 10.6 \, m
 \end{aligned}$$

Sfera di acciaio

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{58.3^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{58.3} 15.7)) = \\
 &= 346.5 \log(\cosh(2.64)) = 346.5 \log(1.63) = 169 \, m
 \end{aligned}$$